ELEMENTI OSIGURANJA

Osnovna pretpostavka postojanja osiguranja jeste prisustvo rizika.

Samo ako postoji određeni rizik, nastaje i ekonomska potreba za njegovim pokrićem putem osiguranja.

Rizik se definiše kao neizvesnost u pogledu ostvarivanja nekog budućeg događaja.

Društvo je razvijalo odbrambeni mehanizam zaštite od rizika, odnosno od posledica štetnih događaja. Tako su se pojavile specijalizovane institucije sa zadatkom da prikupljaju određena sredstva koja su se kretala u visini očekivanih šteta, iz kojih su se isplaćivale određene naknade kada je nastupio štetni događaj.

Osiguranje predstavlja udruživanje svih onih koji su izloženi istim opasnostima a sa ciljem da zajednički podnesu štetu koja će zadesiti samo neke od njih.

Osiguranje je multidisciplinarna nauka, istovremeno ekonomska, pravna i tehnička.

Glavna funkcija osiguranja je naknada štete i isplata osiguranih suma kada se ostvari osigurani slučaj, dakle, ekonomska zaštita imovine. Osigaravač ispunjava tu funkciju iz sredstava koje uplaćuju i udružuju osigurnici unapred (u trenutku zaključenja ugovora o osiguranju). Sredstva akumulirana i udružena u osiguranju imaju značajnu ulogu u opštem finansijskom sistemu svake zemlje.

Višestruki ciljevi osiguranja ne mogu se ostvariti ako ono nije organizovano na naučnoj osnovi. Dostignuća u matematici i statistici su omogućila da se postavi njegova tehnička osnova.

Osnovni zadaci tehničke organizacije osiguranja su:

a) postizanje ravnoteže osiguravajućeg fonda (zbir svih uplata koje na bazi uplaćenih premija ulaze u fond za osiguranje mora biti jednak zbiru svih isplata koje na bazi naknade šteta izlaze iz fonda);
b) grupisanje rizika po različitim opasnostima (vrši se na taj način selekcija rizika po pojedinim kategorijama);
c) obračun premijske rezerve kod osiguranja života (kod osiguranja koja se zasnivaju na kapitalizaciji i kod kojih se

zbog progresivnosti rizika pored riziko premije utvrđuje i štedna premija omogućava se izračunavanje premijske rezerve);

Najznačajnija podela osiguranja je prema predmetu osiguranja i to na osiguranje imovine i osiguranje lica.

Osiguranje imovine

Svrha osiguranja imovine jeste nadiknada štete koja nastaje na toj imovini. Za razli ku od osiguranja lica gde je predmet osiguranja ljudski život, kome ne možemo utvrditi vrednost, a samim tim ne možemo utvrditi ni vrednost štete koja može ugroziti lica, vrednost imovine (osiguranih objekata) se može utvrditi. Prema tome, može se utvrditi i vrednost štete koja može nastati na toj imovini. Kod osiguranja imovine moraju se poštovati dva načela:

a) načelo obeštećenja (niko iz osiguranja ne može dobiti više nego što iznosi šteta koju je pretrpeo. Osiguranje ne sme predstavljati izvor bogaćenja za osiguranika);
b) načelo materjalnog interesa (osiguranik mora biti zainteresovan da se ne dogodi osigurani slučaj, odnosno da se ne desi šteta na osiguranom objektu, a ukoliko se desi da šteta bude nadoknađena. Naknada štete ne može da bude veća od stvarne štete i kreće se u granicama osigurane sume a najviše do vrednosti osigurane stvari. Vrednost osigurane stvari je dakle gornja granica naknade iz osiguranja. Iznos naknade iz osiguranja jednak je visini štete kada je suma osiguranja jednaka vrednosti osigurane stvari. Ukoliko je suma osiguranja ispod vrednosti osigurane stvari koja je predmet osiguranja dolazi do podosiguranja i kod određivanja visine naknade primenjuje se pravilo proporcije. U ovom slučaju imamo delimičnu naknadu štete.

Osiguranje lica

Kod osiguranja lica rizik obihvaćen osiguranjem odnosi se na ličnost osiguranog lica, a ličnost osiguranog lica ne može se izraziti kroz materjalnu vrednost (u novcu) pa ni šteta koja se ostvari na osiguranom licu (povreda, invaliditet) ne može se izraziti u novcu. Cilj osiguranja lica nije naknada štete prouzrokovane osiguranim slučajem već ispalta unapred utvrđene osigurane sume. Osiguranje lica predstavlja specifičnu vrstu osiguranja u kome se ostvareni rizici kod osiguranih lica ne mogu nikada realno nadoknaditi, ali se mogu ublažiti posledice nastupanja rizika materjalnom nadoknadom, odnosno isplatom osigurane sume.

Osiguranje lica objedinjuje funkciju osiguranja i štednje. Štednja putem osiguranja života je namenska, kontinuirana i dugoročna. Zahvaljujući funkciji štednje, iz osiguranja života proizilazi obaveza isplate osigurane sume u slučaju ostvarenja rizika (doživljenja ugovornog vremenskog perioda, u slušaju smrti itd).

Da bi se ostvarila ekvivalentnost svih uplata učinjenih u vidu premija sa isplatama osiguranih suma osiguranicima, ukamaćeni štedni deo premije tokom trajanja osiguranja akumulira se i formira tkzv. matematičku rezervu.

Naime, kod osiguranja života radi se o riziku koji je promenljiv i progresivno raste sa godinama starosti. Ukoliko bi plaćena premija trebalo da pokrije rizik smrti osiguranika u svakom momentu, ona bi morala da raste u skaldu sa porastom verovatnoće smrti osiguranog lica (odnosno saglasno tablicama smrtnosti).

Da bi se izbegao ovakav, za osiguranika nepovoljan, način plaćanja premije (tkzv. prirodna premija), koja bi znatno opterećivala primanja osiguranika u poznijim godinama života, kada je najmanje sposoban da zaradi, pribegava se plaćanju prosečne premije konstantne tokom trajanja osiguranja. Na taj način se postiže da je, u mlađim godinama, kada je rizik smrti manji, prosečna premija veća od prirodne, s vremenom se približavaju i izjednačavaju, da bi pred kraj osiguranja prosečna premija bila ispod prirodne premije.

Da bi osiguravač uvek mogao da ispunjava obavezu plaćanja osigurane sume, u prvim godinama osiguranja, od prosečne premije koja je tada veća od prirodne, izdvaja se višak od koga se formira premijska rezerva. Ta rezerva će služiti za pokriće obaveza u kasnijim godinama, kada je prirodna premija (odnosno sam rizik) veća od prosečne premije. Za iznos premijske rezerve osiguranici odlažu svoju potrošnju za kasniji period. Osiguravajuće kompanije mogu plasirati sredstva premijske rezerve.

Osiguranje života treba da pruži veliki broj mogućnosti i kombinacija za osiguranje tako da svaki građan u njemu nađe svoj interes i način za zadovoljenje određene potrebe. Jedino na taj način ono ima šanse da obuhvati veliki broj građana.

Aktuarska matematika je grana primenjene matematike koja obrađuje matematičke osnove osiguranja. Stručnjaci kojise bave izračunavanjem premija (tarifa) u osiguranju nazivaju se aktuarima. Aktuarska matematika je u tesnoj vezi sa finansijskom matematikom.

Ona kao i finansijska matematika, uvažava koncept vremenske vrednosti novca, odnosno zasniva se na kapitalizaciji (ukamaćivanju). Takođe, osnovni princip finansijske matematike - princip ekvivalencije, po kome je zbir svih uplata svedenih na isti vremenski trenutak jednak zbiru svih isplata svedenih na taj vremenski trenutak, predstavlja osnovni princip i aktuarske matematike.

Osnovna i bitna razlika između finansijske i aktuarske matematike (pre svega ličnog osiguranja) sastoji se u tome što računi aktuarske matematike zavise od starosti lica. Kod rešavanja problema osiguranja života veoma je bitno voditi računa o jednoj nepoznatoj veličini – času smrti čoveka.

Reč premija potiče po nekim autorima od reči *praemium* što znači nagrada, a po drugima od reči *primum* što znači prvi. Prihvatljivije je drugo tumačenje s obzirom da je ugovarač osiguranja u obavezi da prvi uplati premiju- cenu osiguranja tj. Da ispuni svoju obavezu da bi ugovor o osiguranju bio valjan. Premija je izvor sredstava fonda za osiguranje. Premija se može dfinisati kao cena osiguranja, mada je neki autori definišu i kao cenu rizika, budući da je rizik najznačajniji element koji određuje visinu premije. Međutim visinu premije ne određuje samo rizik već i veličina osigurane sume, dužina trajanja osiguranja i kamatna stopa sa kojom se plasiraju sredstva osiguravajućeg fonda. Visina premije je direktno srazmerna veličini rizika, veličini osigurane sume i dužini trajanja osiguranja, a obrnuto srazmerna visini kamatne stope sa kojom se plasiraju sredstva osiguravajućeg fonda.

Sa stanovišta osiguravača premija se sastoji iz nekoliko elemenata. Ukupna (bruto) premija sastoji se iz neto premije i režijskog dodatka. Režijski dodatak služi za pokriće troškova poslovanja osiguravajuće kompanije:

a) Troškovi pribavljanja osiguranja ili akvizicioni troškovi
b) Inkaso troškovi, su troškovi koji nastaju prilikom naplate premije osiguranja.
c) Tekući upravni troškovi ukoliko oni ne pripadaju troškovima zaključivanja osiguranja.

Neto premija (tehnička ili funkcionalna premija) služi za izravnanje rizika u osiguranju i treba da iznosi onoliko koliko je potrebno za isplate iz osiguravajućeg fonda na ime pokrića nastalih šteta. Neto premija se deli na riziko premiju i štednu premiju. Riziko premija tačno odgovara riziku za određeni vremenski period (poslovna godina). Štedna premija služi za naknadu budućih šteta u godinama koje slede. Riziko premija služi za prostorno izravnanje rizika a štedna premija za vremensko izravnanje rizika.

Računske osnove obračuna tarifa u osiguranju lica čine:

a) tablice smrtnosti
b) obračunska kamatna stopa
c) troškovi sprovođenja osiguranja

Osnovni brojevi koji karakterišu tablice smrtnosti su vezani za živa i umrla lica:

l_x - broj živih lica starih x godina

l_{x+1} - broj živih lica starih $x+1$ godinu

$\vdots$

(Vidi se da je $l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \cdots > l_{x+n} > \cdots$)

a

d_x - broj umrlih lica u toku $(x+1)$ godine

d_{x+1} - broj umrlih lica u toku $(x+2)$ godine

$\vdots$

Očigledno da je

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Verovatnoća da će lice staro x godina doživeti $x+1$ godinu je

$${}_1p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Verovatnoća da će lice staro x godina doživeti $x+n$ godinu je

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti $x+1$ godinu je

$${}_1q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - {}_1p_x$$

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti $x+n$ godinu je

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

Sledi da je

$${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

Primer 1.

Kolika je verovatnoća da će lice staro 50 godina

a) doživeti 60 godina života.

b) Umreti pre nego što doživi 60-u godinu života.

Rešenje:

a) $$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$_{50} p_{60} = \frac{l_{50+10}}{l_{50}} = \frac{l_{60}}{l_{50}} = \frac{55973}{69517} = 0{,}805$$

b)

$$_n q_x = 1 - {}_n p_x , \qquad {}_{10} q_{50} = 1 - {}_{10} p_{50} = 1 - 0{,}805 = 0{,}195$$

Verovatno trajanje života

Verovatnoću trajanja života lica starog x godina određujemo uz pretpostavku da je događaj verovatan ako mu je verovatnoća jednaka $\frac{1}{2}$, tako da je

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$$

Primer 2.

Koliko je verovatno trajanje života lica starog 35 godina.

Rešenje:

$$l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$$

$$l_{35+n} = \frac{l_{35}}{2} = \frac{82581}{2} = 41291$$

Izračunati broj živih lica nalazi se između dve tablične vrednosti,

$$l_{68} = 40374, \qquad l_{67} = 42565,$$

Kako je $67 - 35 = 32$ i $68 - 35 = 33$

to je

$$32 < n < 33$$

Približna vrednost se uzima kada se u tablicama smrtnosti uzme najbliža veća vrednost od izračunate a to je $l_{67} = 42565$ pa je $n \approx 32$.

Srednje trajanje života

Srednje trajanje života je prosečan broj godina koje bi još preživelo lice staro x godina. Ako pretpostavimo da oni koji umiru u toku godine umru početkom godine, ukupan broj godina koji prežive l_x lica je

$$l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots$$

(Od broja l_x lica starih x godina sledeću godinu doživeće samo l_{x+1} osoba. Svaka od tih l_{x+1} lice preživeće po 1 godinu, pa će ukupan broj preživelih godina biti l_{x+1} itd.)

Srednje trajanje života dobićemo kada ukupan broj godina preživljenja podelimo sa l_x, odnosno:

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}$$

Ako pretpostavimo da ini koji umru u toku godine, umru krajem godine tada je ukupan broj godina koji preživi l_x lica

$$l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots$$

a srednje trajanje života bi tada bilo

$$e_x{}' = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} = 1 + e_x$$

Osobe koje umiru u toku jedne godine ne umiru ni početkom ni krajem godine, već tokom cele godine pa srednje trajanje života koje bi najviše odgovaralo stvarnosti može se uzeti kao aritmetička sredina e_x i $e_x{}'$, odnosno:

$$e_x{}^0 = \frac{e_x + e_x{}'}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2} = \frac{1}{2} + e_x$$

KOMUTATIVNI BROJEVI

Pomoću osnovnih brojeva i obračunske kamatne stope $(r = 1 + \frac{p}{100})$ koja se primenjuje u kompanijama izračunavaju se komutativni brojevi:

$D_x = \frac{l_x}{r^x} = l_x \cdot II_{p\%}^{x}$ - broj diskontovanih živih lica starih x godina

$D_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = l_{x+1} \cdot II_{p\%}^{x+1}$ - broj diskontovanih živih lica starih $x+1$ god.

$D_{x+2} = \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} = l_{x+2} \cdot II_{p\%}^{x+2}$ - broj diskontovanih živih lica starih $x+2$ god.

$\vdots$

Sledeći komutativni broj je N_x. N_x je zbir brojeva diskontovanih živih lica počev od starosti x do najdublje starosti.

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_\omega = \sum_{i=0}^{\omega-x} D_{x+i}$$

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega$$

Sledi da je

$$N_x - N_{x+1} = D_x$$

Sledeći komutativni broj S_x je zbir zbirova diskontovanih živih lica počev od starosti x do najdublje starosti ω koju doživi posmatrana grupa lica.

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \cdots + N_\omega = \sum_{i=0}^{\omega-x} N_{x+i}$$

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_\omega$$

Sledi da je

$$S_x - S_{x+1} = N_x$$

Zatim imamo komutativne brojeve vezane za umrla lica.

$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = d_x \cdot II_{p\%}^{x+1}$ - broj diskontovanih umrlih lica u toku $(x+1)$ god.

$C_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{r^{x+2}} = l_{x+2} \cdot II_{p\%}^{x+2}$ - broj diskontovanih umrlih lica u toku $(x+1)$ g.

$\vdots$

M_x je zbir brojeva diskontovanih umrlih lica počev od onih koji su umrli u toku $x+1$ godine.

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \quad \cdots \quad + C_{\omega-1} = \sum_{i=0}^{\omega-x+1} C_{x+i}$$

$$M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + \quad \cdots \quad + C_{\omega-1}$$

Sledi da je

$$M_x - M_{x+1} = C_x$$

R_x je zbir zbirova brojeva diskontovanih umrlih lica počev sa onima koji su umrli u toku $x+1$ godine.

$$R_x = M_x + M_{x+1} + \quad \cdots \quad + M_{\omega-1} = \sum_{i=0}^{\omega-x+1} M_{x+i}$$

$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + \quad \cdots \quad + M_{\omega-1}$$

Sledi da je

$$R_x - R_{x+1} = M_x$$

Može se pokazati da između veličina $D_x, C_x, N_x\ i\ M_x$ postoje određene relacije.

Utvrđivanje tarifa kod osiguranja

Osiguranik može da uplati osiguravajućoj kompaniji jednokratnu premiju (mizu) ili da plaća premije u ratama,da bi na osnovu toga obezbedio primanje rente do kraja života ili za neki određeni vremenski period

Prema trajanju renta može biti vremenska (privremena) ako plaćanje rente traje određeni vremenski period i doživotna ako njeno plaćanje traje doživotno (do kraja života osiguranog lica). Prema početku primanja renta može biti neposredna i odložena. Prema načinu primanja renta može biti dekurzivna (prima se krajem obračunskog perioda) i anticipativna (prima se početkom obračunskog perioda).

Osiguranje uplatom jednokratne premije (mize)

Osiguranje konstantne rente:

Sa a_{x} označićemo mizu koju mora uplatiti osigurano lice da bi mu se isplaćivala godišnja renta od 1 dinar početkom ugovorenog perioda (anticipativna renta), odnosno sa $\overline{a}_{\mathrm{x}}$ označićemo mizu koju mora uplatiti osigurano lice da bi mu se isplaćivala godišnja renta od 1 dinar krajem ugovorenog perioda (dekurzivna renta).

Dakle a_x - neto miza za 1 dinar rente. Osiguravajuća kompanija će u momentu zaključenja osiguranja primiti od l_x lica starih x godina

$$l_x \cdot a_x \text{ - dinara}$$

Za primljenih $l_x \cdot a_x$ dinara osiguravajuća kompanija se obavezuje da će svim licima starim x godina isplatiti odmah po 1 dinar. Takođe se kompanija obavezuje da će licima starim $(x+1)$ godinu početkom $(x+2)$ godine isplatiti po 1 dinar odnosno ukupno l_{x+1} dinar itd. Znači za ovo osiguranje iznose

ukupne uplate:	ukupne isplate
$l_x \cdot a_x$ - dinara	početkom 1 godine l_x dinara
	početkom 2 godine l_{x+1} dinara
	početkom 3 godine l_{x+2} dinara
	$\vdots$

Prema principu ekvivalencije sve uplate moraju biti jednake svim isplatama (na dan zaključenja osiguranja).

$$l_x \cdot a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \quad \cdots$$

Sada podelimo levu i desnu stranu sa r^x pa dobijamo

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{2+2}} + \quad \cdots$$

Što koristeći komutativne brojeve daje

$$D_x \cdot a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \quad \cdots$$

$$D_x \cdot a_x = N_x$$

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} \text{ - neto miza za 1 dinar rente.}$$

$$M = R \cdot a_x \quad \text{- neto miza za R dinara rente.}$$

a) ***Anticipativna renta:***

n k	n	$n = \omega - x$ (Doživotna renta)
k	${}_{k/n}a_x = \dfrac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$	${}_{k/}a_x = \dfrac{N_{x+k}}{D_x}$
k = 0	${}_{/n}a_x = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	$a_x = \dfrac{N_x}{D_x}$

x - Pristupna starost osiguranika
k - Vreme odloženosti, n - Vreme privremenosti.

b) ***Dekurzivna renta:***

n k	n	$n = \omega - x$ (Doživotna renta)
k	${}_{k/n}\overline{a}_x = \dfrac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$	${}_{k/}\overline{a}_x = \dfrac{N_{x+k+1}}{D_x}$
k = 0	${}_{/n}\overline{a}_x = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$	$\overline{a}_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

Miza (M) anticipativne rente od R dinara je $M = R \cdot a_x$.
Miza (M) dekurzivne rente od R dinara je $M = R \cdot \overline{a}_x$.

Osiguranje konstantnog kapitala:

a) ***Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja:***

Osiguravajuća kompanija u slučaju ovakve vrste osiguranja isplaćuje ugovorenu sumu samo onim osiguranicima koji dožive ugovoreni rok osiguranja. Lice staro x godina osiguralo je K dinara u slučaju da doživi $x + n$ godina.

Sa ${}_{/n}E_x$ označićemo mizu za 1 dinar osigurane sume.

Ukupna uplata osiguravajućoj kompaniji na dan osiguranja je $l_x \cdot {}_{/n}E_x$ dinara, a ukupna isplata na kraju $(x + n)$-te godine, licima koja su doživela $x+n$ godina po 1 dinar, dakle, ukupno l_{x+n} dinara, što diskontovano na dan uplate iznosi $\frac{l_{x+n}}{r^n}$. Koristeći princip ekvivalencije dobija se

$$l_x \cdot {}_{/n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^n}$$

a deleći levu i desnu stranu jednačine sa r^x dobijamo

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{/n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^{x+n}}$$

$$D_x \cdot {}_{/n}E_x = D_{x+n}$$

$${}_{/n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Za K dinara osigurane sume miza iznosi $M = K \cdot {}_{/n}E_x$

b) ***Osiguranje kapitala za slučaj smrti:***

Kada se osigurani kapital isplaćuje korisnikuosiguranja samo ako osiguranik preživi k godina i umre u narednih n godina onda imamo odloženo privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti. Sa ${}_{k/n}A_x$ označićemo mizu za 1 dinar osigurane sume.

ukupne uplate:	ukupne isplate
$l_x \cdot {}_{k/n}A_x$ - dinara	krajem $k+1$ god. d_{x+k} dinara
	krajem $k+2$ god. d_{x+k+1} dinara
	krajem $k+3$ god. d_{x+k+2} dinara
	$\vdots$
	krajem $k+n$ god. $d_{x+k+n-1}$ dinara

Izjednačavajući, po principu ekvivalencije, uplatu sa zbirom diskontovanih (na dan zaključenja osiguranja) isplata dobijamo:

$$l_x \cdot {}_{k/n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \quad \cdots \quad + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{k+n}}$$

i deleći levu i desnu stranu jednačine sa r^x dobijamo:

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot {}_{k/n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{x+k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{x+k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{x+k+3}} + \cdots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{x+k+n}}$$

$$D_x \cdot {}_{k/n}A_x = C_{x+k} + C_{x+k+1} + C_{x+k+2} + \cdots + C_{x+k+n-1}$$

Kako je

$$M_{x+k} = C_{x+k} + C_{x+k+1} + \cdots + C_{x+k+n-1} + C_{x+k+n} + \cdots$$
$$M_{x+k+n} = C_{x+k+n} + C_{x+k+n+1} + \cdots$$

sledi da je

$$M_{x+k} - M_{x+k+n} = C_{x+k} + C_{x+k+1} + \cdots + C_{x+k+n-1}$$

pa je

$$D_x \cdot {}_{k/n}A_x = M_{x+k} - M_{x+k+n}$$

$${}_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

je neto miza za 1 dinar ovog osiguranja. Za osigurani kapital od K dinara miza je $M = K \cdot {}_{k/n}A_x$.
Ako je $k = 0$ onda je to neposredno privremeno osiguranje kapitala.
Ako je $n = \omega - x$ onda je to odloženo doživotno osiguranje kapitala.
Ako je $k = 0$ i $n = \omega - x$ onda je to neposredno doživotno osiguranje kapitala.

n k	n	$n = \omega - x$ (Doživotna renta)
k	${}_{k/n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$	${}_{k/}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$
k = 0	${}_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$	$A_x = \frac{M_x}{D_x}$

c) ***Mešovito osiguranje:***

Ovo osiguranje predstavlja zapravo spajanje osiguranja za slučaj doživljenja sa osiguranjem kapitala za slučaj smrti. Osiguravajuća kompanija će u svakom slučaju isplatiti kapital ili osiguraniku krajem određenog vremena ako je živ ili korisniku osiguranja krajem godine u kojoj je osiguranik unro. Mizu za 1 dinar osigurane sume koja se treba isplatiti korisniku osiguranja ako lice staro x godina umre u narednih n godina ili osiguraniku ako doživi $x+n$ označimo sa $A_{x,n||}$.

ukupne uplate:	ukupne isplate
$l_x \cdot A_{x,n||}$ - dinara	krajem 1 godine d_x dinara
	krajem 2 godine d_{x+1} dinara
	krajem 3 godine d_{x+2} dinara
	$\vdots$
	krajem n godine $d_{x+n-1} + l_{x+n}$ din. (naslednicima i živim licima)

Koristeći princip ekvivalencije dobijamo:

$$l_x \cdot A_{x,n||} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \cdots + \frac{d_{x+n-1}}{r^n} + \frac{l_{x+n}}{r^n}$$

što posle deljenja leve i desne strane jednačina sa r^x i uvođenja komutativnih brojeva daje:

$$D_x \cdot A_{x,n||} = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} + D_x$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x,n||}} = \frac{\mathrm{M_x} - \mathrm{M_{x+n}} + D_{x+n}}{\mathrm{D_x}} = \frac{\mathrm{M_x} - \mathrm{M_{x+n}}}{\mathrm{D_x}} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{M_x} - \mathrm{M_{x+n}}}{\mathrm{D_x}} = {}_{/n}A_x \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{D_{x+n}}}{\mathrm{D_x}} = {}_{/n}E_x$$

to je

$$\mathrm{A}_{\mathrm{x,n||}} = {}_{/n}A_x + {}_{/n}E_x$$

Prema tome, miza mešovitog osiguranja jednaka je zbiru miza za privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti i osiguranja kapitala za slučaj doživljenja za vreme trajanja mešovitog osiguranja.

Osiguranje uplatom višekratnim konstantnim doživotnim premijama

Osiguranje uplatom jednokratnom premijom (mizom) je neprktično sa aspekta osiguranika. Osiguraniku je povoljnije da uplate raspodeli na više godina u jednakim iznosima. Premije se ne plaćaju posle smrti osiguranika, odnosno, posle prijema ceokupne osigurane sume. (Premije se prestaju uplaćivati pre nego osiguravač počne izvršavati isplate predviđene ugovorom). Prva premija se plaća kod zaključenja osiguranja, pa se godišnje premije mogu smatrati kao lična renta koju osiguranik plaća osiguravaču. Ako se premija plaća odmah, do smrti osiguranika onda je to doživotna premija, a akos se plaća samo određeni broj godina onda je to privremena premija.

Neka je $P(A_x)$ godišnja doživotna premija za 1 dinar doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti, osiguravajuća kompanija će od l_x osiguranih lica starih x godina primiti,

<u>ukupne uplate:</u>	<u>ukupne isplate</u>
početkom 1 god. od l_x lica $l_x \cdot P(A_x)$ din.	kraj 1 god. d_x din.
početkom 2 god. od l_{x+1} lica $l_{x+1} \cdot P(A_x)$ din.	kraj 2 god. d_{x+1} din.
početkom 3 god. od l_{x+2} lica $l_{x+2} \cdot P(A_x)$ din.	kraj 3god. d_{x+3} din.
$\vdots$	$\vdots$

Koristeći princip ekvivalencije dobijamo:

$$l_x \cdot P(A_x) + \frac{l_{x+1} \cdot P(A_x)}{r} + \frac{l_{x+2} \cdot P(A_x)}{r^2} + \quad \cdots \quad = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \quad \cdots$$

Deleći levu i desnu stranu jednačine sa r^x i uvodeći komutativne brojeve dobijamo:

$$P(A_x)\,(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \quad \cdots \quad) = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \quad \cdots$$

$$P(A_x)\, N_x = M_x$$

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x}$$

Dalje je

$$P(A_x) = \frac{\dfrac{M_x}{D_x}}{\dfrac{N_x}{D_x}} = \frac{A_x}{a_x}$$

Za odloženo osiguranje kapitala za slučaj smrti analogno se dobija godišnja doživotna premija

$$P({}_{k/}A_x) = \frac{{}_{k/}A_x}{a_x}$$

Odnosno

$$P({}_{k/}A_x) = \frac{\dfrac{M_{x+k}}{D_x}}{\dfrac{N_x}{D_x}} = \frac{M_{x+k}}{N_x}$$

Može se zaključiti da je godišnja doživotna premija za jedinicu osigurane sume za svaku vrstu osiguranja, količnik mize osiguranja za koje se traži godišnja premija i mize za anticipativnu doživotnu rentu (premija se plaćaju početkom godine).

Kod nekih vrsta osiguranja uplatom višekratnih premija, premija ima samo teorijski, a nikako praktični značaj. Npr. Privremeno osiguranje kapitala uplatom doživotne premije nema smisla jer bi se premija plaćala i posle dogovorom predviđenog vremena trajanja osiguranja.

$P\left[{}_{k/}a_x\right] = \dfrac{N_{x+k}}{N_x}$	$P\left[{}_{k/}\bar{a}_x\right] = \dfrac{N_{x+k+1}}{N_x}$	$P\left[{}_{k/}A_x\right] = \dfrac{M_{x+k}}{N_x}$
$P\left[a_x\right] = \dfrac{N_x}{N_x}$	$P\left[\bar{a}_x\right] = \dfrac{N_{x+1}}{N_x}$	$P\left[A_x\right] = \dfrac{M_x}{N_x}$

D_x, N_x, M_x - komutacioni brojevi.

Osiguranje uplatom višekratnim konstantnim privremenim premijama

Ukoliko osiguranik plaća premiju najviše m godina od dana osiguranja, takva premija se naziva privremena premija.

Neka je ${}_mP(A_x)$ godišnja privremena premija za 1 dinar osigurane sume doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti.

ukupne uplate:	ukupne isplate
početkom 1 god. od l_x lica $l_x \cdot {}_mP(A_x)$ din.	kraj 1 god. d_x din.
početkom 2 god. od l_{x+1} lica $l_{x+1} \cdot {}_mP(A_x)$ din.	kraj 2 god. d_{x+1} din.
početkom 3 god. od l_{x+2} lica $l_{x+2} \cdot {}_mP(A_x)$ din.	kraj 3god. d_{x+3} din.
$\vdots$	$\vdots$
početkom m god. od l_{x+m-1} lica $l_{x+m-1} \cdot {}_mP(A_x)$ din.	$\vdots$

Koristeći princip ekvivalencije dobijamo:

$$l_x \cdot {}_mP(A_x) + \frac{l_{x+1} \cdot {}_mP(A_x)}{r} + \quad \cdots \quad + \frac{l_{x+m-1} \cdot {}_mP(A_x)}{r^{m-1}} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \cdots$$

Deleći levu i desnu stranu jednačine sa r^x i uvodeći komutativne brojeve dobijamo:

$${}_mP(A_x)\,(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \quad \cdots \quad D_{x+m-1}) = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots$$

$${}_mP(A_x)\,(N_x - N_{x+m}) = M_x$$

$${}_mP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

Dalje je

$${}_mP(A_x) = \frac{\dfrac{M_x}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} = \frac{A_x}{{}_{/m}a_x}$$

Ukoliko se radi o plaćanju godišnje privremene premije za privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti analogno se dobija

$$ {}_{m}P({}_{/n}A_{x}) = \frac{{}_{/n}A_{x}}{{}_{/m}a_{x}} $$

Odnosno

$$ {}_{m}P(A_{x}) = \frac{\dfrac{M_{x}-M_{x+n}}{D_{x}}}{\dfrac{N_{x}-N_{x+m}}{D_{x}}} = \frac{M_{x}-M_{x+n}}{N_{x}-N_{x+m}} $$

Osiguranje konstantnog kapitala:

a) Osiguranje konstantnog kapitala za slučaj smrti:

n k	n	$n=\omega-x$
k k+n> m	${}_{m}P\left[{}_{k/n}A_{x}\right] = \dfrac{M_{x+k}-M_{x+k+n}}{N_{x}-N_{x+m}}$	${}_{m}P\left[{}_{k/}A_{x}\right] = \dfrac{M_{x+k}}{N_{x}-N_{x+m}}$
k = 0 n>m	${}_{m}P\left[{}_{/n}A_{x}\right] = \dfrac{M_{x}-M_{x+n}}{N_{x}-N_{x+m}}$	${}_{m}P\left[A_{x}\right] = \dfrac{M_{x}}{N_{x}-N_{x+m}}$

b) Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja (m≤n):

$$ {}_{m}P\left[{}_{/n}E_{x}\right] = \frac{D_{x+n}}{N_{x}-N_{x+m}} $$

c) Mešovito osiguranje:

$$ {}_{m}\mathrm{P}\left[\mathrm{A}_{x,n||}\right] = \frac{\mathrm{M}_{x}-\mathrm{M}_{x+n}+\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{N}_{x}-\mathrm{N}_{x+m}} $$

Osiguranje konstantne rente:

a) *Anticipativna renta:*

n k	n	$n=\omega-x$ (Doživotna renta)
k k+n> m	$_mP\left[_{k/n}a_x\right]=\dfrac{N_{x+k}-N_{x+k+n}}{N_x-N_{x+m}}$	$_mP\left[_{k/}a_x\right]=\dfrac{N_{x+k}}{N_x-N_{x+m}}$
k = 0 n>m	$_mP\left[_{/n}a_x\right]=\dfrac{N_x-N_{x+n}}{N_x-N_{x+m}}$	$_mP\left[a_x\right]=\dfrac{N_x}{N_x-N_{x+m}}$

k -Vreme odloženosti, n -Vreme privremenosti, m -Vreme plaćanja premija.

b) *Dekurzivna renta:*

n k	n	$n=\omega-x$ (Doživotna renta)
k k+n> m	$_mP\left[_{k/n}\bar{a}_x\right]=\dfrac{N_{x+k+1}-N_{x+k+n+1}}{N_x-N_{x+m}}$	$_mP\left[_{k/}\bar{a}_x\right]=\dfrac{N_{x+k+1}}{N_x-N_{x+m}}$
k = 0 n>m	$_mP\left[_{/n}\bar{a}_x\right]=\dfrac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{N_x-N_{x+m}}$	$_mP\left[\bar{a}_x\right]=\dfrac{N_{x+1}}{N_x-N_{x+m}}$

Naravno, neke vrste osiguranja su samo teorijski postavljene i nemaju praktičnog značaja. Npr. Osiguranje neposredne rente, jer bi tada osiguranik plaćao premiju u iznosu rente uvećanu za troškove tj. osiguranik plaća bruto premiju.

Primer 3.

Lice staro 40 godina osiguralo je godišnju rentu od 1.000 dinara. Renta je doživotna. Izračunati mizu: a) Anticipativne rente
b) Dekurzivne rente.

Rešenje: a) Kako je miza anticipativne doživotne rente $M = R \cdot a_x$,

$a_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{176.052,3}{11.139,36} = 15,81$ pa je $M = 1.000 \cdot 15,81 = 15.810$

Prema tome treba uplatiti jednokratno 15.810 dinara da bi se na osnovu toga osigurala doživotna anticipativna renta od 1.000 dinara.

b) $$M = R\frac{N_{x+1}}{D_x} = 1.000\frac{164.913,0}{11.139,36} = 1.000 \cdot 14,82 = 14.820$$

Primer 4.

Koji iznos mora uplatiti lice staro 45 godina za godišnju doživotnu anticipativnu rentu od 10.000 dinara koju će primati nakon 15 godina od dana osiguranja. Troškovi su 10%.

Rešenje:

U ovom slučaju je u pitanju odložena doživotna renta pa je:

$$_{k/}a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} = \frac{37.333,81}{8.527,427} = 4,378$$

Sada izračunamo 10% troškova na 4,378 što iznosi 0,4378 pa je miza za 1 dinar jednaka $4,378 + 0,4378 = 4,8158$ dinara.

Miza za rentu od 10.000 dinara je:

$$M = 10.000 \cdot 4,8158 = 48.158 \text{ dinara.}$$

Primer 5.

Ako lice staro 40 godina na ime jedokratne premije za osiguranje anticipativne rente koju će primati 10 godina ali po isteku pete godine, uplatilo je 60.000 dinara, koliku će rentu primati.

Rešenje:

Sada se radi o odloženoj privremenoj anticipativnoj renti gde je: $x = 40$, $k = 5$, $M = 60.000$, pa je:

$$_{k/n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} \Rightarrow {}_{5/10}a_{40} = \frac{N_{45} - N_{55}}{D_{40}} \Rightarrow {}_{5/10}a_{40} = 6,03$$

Kako je $M = R \cdot {}_{k/n}a_x$ to je:

$$60.000 = R \cdot 6{,}03 \Rightarrow R = 9.950{,}24 \text{ dinara.}$$

Primer 6.

Lice staro 30 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima posle smrti osiguranika ako osiguranik umre posle 10 godina od dana osiguranja. Odrediti jednokratnu premiju.

Rešenje:

Sad je slučaj odloženog doživotnog osiguranja kapitala za slu čaj smrti pa je miza za jedinicu osiguranog kapitala:

$$ {}_{k/}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x} \quad \Rightarrow \quad {}_{10/}A_{30} = \frac{M_{40}}{D_{30}} = 0{,}1468489$$

Za 100.000 dinara osiguranog iznosa jednokratna premija iznosi:

$$M = K \cdot {}_{k/}A_x = 100.000 \cdot 0{,}1468489 = 14.684{,}89 \text{ dinara.}$$

Primer 7.

Lice staro 30 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima ako umre u toku 10 godina od dana osiguranja. Odrediti jednokratnu premiju.

Rešenje:

Ovde je x = 30, n = 10, K = 100.000, k = 0, pa je:

$$ {}_{/10}A_{30} = \frac{M_{30} - M_{40}}{D_{30}} = 0{,}0251873$$

Za 100.000 dinara osiguranog kapitala jednokratna premija je:

$$M = K \cdot {}_{/n}A_x = K \cdot {}_{/10}A_{30} = 100.000 \cdot 0{,}0251873 = 2.518{,}73 \text{ dinara.}$$

Primer 8.

Lice staro 40 godina osiguralo je doživotnu anticipativnu rentu od 1.000 dinara. Za ovu rentu plaća se godišnja premija od 20 godina. Odrediti premiju?

Rešenje:

Ovde je x = 40, R = 1.000, m = 20, pa je premija za 1 dinar osigurane rente:

$$ {}_{20}P[a_{40}] = \frac{N_{40}}{N_{40} - N_{60}} = 1{,}26913 $$

a za 1.000 dinara osigurane rente premija će biti:

$$ P = 1.000 \cdot {}_{20}P[a_{40}] = 1.000 \cdot 1{,}26913 = 1.269{,}13 $$

Primer 9.

Lice staro 30 godina osiguralo je rentu koju će primati od svoje 65-te godine. Za ovu premiju plaća se premija 35 godina u iznosu od po 1.000 dinara godišnje. Odrediti rentu.

Rešenje:

Ovde je x = 30, k = 35, m = 35, P = 1.000 dinara, pa je:

$$ {}_{m}P[{}_{k/}a_{x}] = \frac{N_{x+k}}{N_{x} - N_{x+m}} = \frac{N_{65}}{N_{30} - N_{65}} = 0{,}0721 $$

Prema tome osigurano lice plaća 35 godina godišnje ${}_{35}P[{}_{35/}a_{30}]$ dinara odnosno po 0,0721 dinara da bi od svoje 65-te godine primalo doživotnu rentu od po 1 dinar. Za rentu od R dinara to bi bilo:

$$ P = R \cdot 0{,}0721 \;\Rightarrow\; 1.000 = R \cdot 0{,}0721 \;\Rightarrow\; R = 13.869{,}63 \text{ dinara.} $$

Primer 10.

Koliku godišnju premiju mora plaćati u toku celog trajanja osiguranja lice staro 40 godina da bi posle 20 godina primilo 400.000 dinara.

Rešenje:

Sada je u pitanju osiguranje kapitala za slučaj doživljenja gde je: x=40, n=20, k=20, K=400.000 dinara, pa je:

$$ {}_{20}P[{}_{/20}E_{40}] = \frac{D_{60}}{N_{40} - N_{60}} = 0{,}0251498 $$

a za 400.000 dinara osiguranog kapitala biće:

$$P = 400.000 \cdot {}_{20}P\left[{}_{/20}E_{40}\right] = 400.000 \cdot 0{,}0251498 = 10.059{,}92 \text{ dinara.}$$

Primer 11.

Lice staro 40 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima na kraju godine u kojoj umre, pa ma kad umrlo. Naći godišnju premiju koja se plaća: a) Doživotno b) 10 godina od dana osiguranja.

Rešenje:

a) U pitanju je osiguranje kapitala za slučaj smrti sa doživotnim plaćanjem premija i gde je: x = 40, K = 100.000, pa je:

$$P\left[A_{40}\right] = \frac{M_{40}}{N_{40}} = 0{,}018 \;, \qquad \text{odnosno:} \quad P = 100.000 \cdot 0{,}018 = 1.800 \text{ din.}$$

b) x = 40, m = 10, K = 100.000.

$${}_{10}P\left[A_{40}\right] = \frac{M_{40}}{N_{40} - N_{50}} = 0{,}031, \text{ pa je: } P = 100.000 \cdot 0{,}031 = 3.100 \text{ din.}$$

Primer 12.

Lice staro 35 godina osiguralo je 100.000 dinara po mešovitom osiguranju sa 25-godišnjim trajanjem i godišnjim plaćanjem premija. Odrediti premiju.

Rešenje:

U pitanju je mešovito osiguranje gde je:
x = 35, n = 25, m = 25, K = 100.000 dinara.

$${}_{25}P\left[A_{35,\overline{25}|}\right] = \frac{M_{35} - M_{60} + D_{60}}{N_{35} - N_{60}} = 0{,}02334$$

$$P = 100.000 \cdot 0{,}02334 = 2.334 \text{ dinara.}$$

ZADACI:

1. Ako lice staro 40 godina uloži 1.000.000 dinara, izračunati koju će anticipativnu doživotnu rentu primati osiguranik počev od dana osiguranja.

2. Lice staro 40 godina osiguralo je anticipativnu rentu od 10.000 dinara koju će primati 10 godina ali po isteku pete godine. Odrediti jednokratnu premiju.

3. Lice staro 40 godina osiguralo je kapital od 100.000 dinara da mu se isplati ako doživi 50-tu godinu života. Odrediti jednokratnu premiju za ovo osiguranje.

4. Ako bi lice staro 40 godina na ime jednokratne premije za slučaj doživljenja 60-te godine života uplatilo 10.000 dinara, koliki bi tada bio iznos osiguranog kapitala.

5. Lice staro 30 godina osiguralo je doživotnu dekurzivnu rentu od 20.000 dinara. Koliku je mizu uplatilo.

6. Lice staro 34 godine osiguralo je doživotnu rentu od 15.000 dinara, odloženu 10 godina. Koliku je mizu uplatilo.

7. Lice staro 35 godina osiguralo je rentu od 12.000 dinara. Koliku je mizu uplatilo ako osiguranik treba rentu da prima od svoje 45-te do 65-te godine starosti.

8. Lice staro 50 godina osiguralo je kapital od 1.000.000 dinara da se isplati njegovim naslednicima ako osiguranik umre pre navršene 60-te godine. Kolika je miza za ovo osiguranje.

9. Lice staro 38 godina osiguralo je doživotnu anticipativnu rentu od 20.000 dinara. Koliku premiju treba da plaća 20 godina.

10. Lice staro 25 godina osiguralo je kapital od 200.000 dinara da se isplati naslednicima ako osiguranik preživi prvih 20 godina od dana osiguranja pa umre u toku narednih 10 godina. Osiguranje je izvršeno uplatom premije koja se plaća 15 godina. Kolika je premija.